–M1–

Description et paramétrage du mouvement d'un point

Contents

Questions de cours :

- Présenter les trois systèmes de coordonnées : cartésiennes, cylindriques et sphériques, avec la base locale associée.
- Calculer le vecteur vitesse et accélération dans les coordonnées cylindriques.
- Décrire complètement un mouvement parabolique uniformément accéléré (paramétrage, équations du mouvement, graphe).
- Décrire complètement un mouvement circulaire uniforme : vecteur vitesse, accélération en coordonnées polaires, démonstration du lien entre la vitesse angulaire et la période de révolution T.

Capacités exigibles du BO :

- Citer une situation où la description classique de l'espace ou du temps est prise en défaut. (Cours)
- Exprimer à partir d'un schéma le déplacement élémentaire dans les différents systèmes de coordonnées, construire le trièdre local associé et en déduire géométriquement les composantes du vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes et cylindriques. (Cours)
- Établir les expressions des composantes des vecteurs position, déplacement élémentaire, vitesse et accélération dans les seuls cas des coordonnées cartésiennes et cylindriques. (Ex. 2, 3, 5, 6)
- Identifier les degrés de liberté d'un mouvement (ex. 1)
- Choisir un système de coordonnées adapté au problème. (ex. 1 et 5)
- Exprimer le vecteur vitesse et le vecteur position en fonction du temps. (ex. 2, 3, 5 et 6)
- Établir l'expression de la trajectoire en coordonnées cartésiennes. (ex. 2 et 3)
- Exprimer les composantes du vecteur position, du vecteur vitesse et du vecteur accélération en coordonnées polaires planes. (ex. 3 et 5)
- Situer qualitativement la direction du vecteur vitesse et du vecteur accélération pour une trajectoire plane (ex. 5, 6 et 7)
- Exploiter les liens entre les composantes du vecteur accélération, la courbure de la trajectoire, la norme du vecteur vitesse et sa variation temporelle. (ex. 7)
- Réaliser et exploiter quantitativement un enregistrement vidéo d'un mouvement : évolution temporelle des vecteurs vitesse et accélération. (TP)

Dans toute la suite va être développée la mécanique telle qu'elle a été conçue dès le XVII$^{\text{e}}$ siècle avec Galilée et Newton. Bien qu'elle soit toujours valable aujourd'hui, on sait depuis Einstein qu'il faut considérer des systèmes se déplaçant à des vitesses très inférieures devant la vitesse de la lumière (sinon il faut utiliser la **relativité restreinte ou générale**), et de taille suffisamment importante (idéalement au-delà du micron, sinon il faut utiliser la **mécanique quantique**).

L'objet de ce premier chapitre est de se familiariser avec la **cinématique**, c'est-à-dire la description du mouvement des objets, sans s'intéresser aux causes qui lui donnent naissance. Nous y retrouverons les notions de position, vitesse et accélération, ainsi que de trajectoire. De façon à décrire au mieux un mouvement, trois **systèmes de coordonnées** vont être détaillés.

I. Notions de cinématique

I.1 Objet ponctuel

En physique, on considère qu'un objet est ponctuel dès que l'on peut négliger sa dimension devant les autres dimensions du problème. On qualifie alors cet objet de **point matériel** : on repère souvent un objet par son centre de gravité noté G.
Par exemple, la Terre et le Soleil peuvent être considérés comme des points matériels dans l'étude du mouvement de la Terre autour de ce dernier car

$$D_{\mathrm{T-S}} = 150 \cdot 10^6 \text{ km} \gg R_{\mathrm{T}},\, R_{\mathrm{S}}$$

Par contre, même si ces hypothèses sont vérifiées, l'étude du mouvement de rotation de la Terre sur elle-même ne fait évidemment plus intervenir la notion d'objet ponctuel.

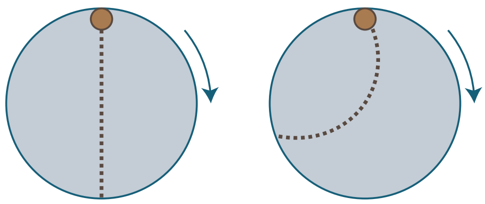
I.2 Référentiel

Un référentiel est une notion particulièrement importante en mécanique : il définit le cadre spatio-temporel de référence. Il est composé :

- d'un **repère d'espace**, c'est-à-dire une origine, une base orthonormée, et une unique unité de longueur (le mètre). L'origine du repère est purement arbitraire, elle n'a aucune signification physique intrinsèque ;
- d'une **horloge** ou **repère de temps**, placée à l'origine du repère d'espace, dont l'origine des temps est choisie également arbitrairement, et dont l'écoulement est identique pour tout référentiel (on parle de temps **absolu**).

* À noter qu'en relativité, le temps n'est pas absolu et dépend du référentiel.

On notera également que la **description du mouvement dépend du référentiel**, comme le montre l'exemple ci-dessous d'une balle se déplaçant selon une trajectoire rectiligne **relativement** à un plateau tournant.



référentiel du plateau — **référentiel du laboratoire**

I.3 Caractère absolu des distances et intervalles de temps

La description classique de l'espace-temps suppose que les durées (intervalles de temps) et les distances ne dépendent pas du référentiel d'étude. On parle de **caractère absolu des durées et des distances**.

Cette description classique est remise en cause lorsque la vitesse de déplacement v du système est proche de celle de la lumière (typiquement $c/10 < v < c$). Il faut alors tenir compte de la théorie de la relativité restreinte (Einstein, 1905). Les durées et les longueurs perdent leur caractère absolu, elles deviennent relatives et dépendent du référentiel dans lequel on réalise l'étude. On parle de dilatation des durées et de contraction des longueurs.

Exemple : **désintégration des muons**.

Les muons apparaissent à une altitude d'environ $h = 10\,\text{km}$ et se déplacent environ à la vitesse de la lumière. La durée de vie moyenne des muons immobiles mesurée en laboratoire est d'environ $\tau = 2 \cdot 10^{-6}\,\text{s}$. La distance maximale que devraient parcourir les muons dans l'atmosphère serait donc de $d = c\tau = 600\,\text{m} \ll h$. Dans le référentiel des muons, cela signifie qu'ils voient une atmosphère d'épaisseur inférieure à d et qu'ils la traversent en une durée inférieure à τ. On doit en conclure que la mesure des durées et des distances dépendent de l'observateur !

I.4 Position, vitesse et accélération

La description mécanique du mouvement d'un point matériel M fait intervenir trois grandeurs physique : sa position, sa vitesse, et son accélération. On suppose que le référentiel d'étude est fixé, son origine étant le point O.

a) Position

On repère la position du point $M(t)$ par le **vecteur position** $\vec{r} = \overrightarrow{OM}(t)$. Pour exprimer ce vecteur, il faudra alors adopter un système de coordonnées, c'est-à-dire une manière de repérer mathématiquement la position d'un objet.

On introduit également le vecteur **déplacement élémentaire** $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}\vec{r}$ encoré noté $\mathrm{d}\vec{\ell}$ comme étant la limite d'un déplacement sur une durée infinitésimale $\mathrm{d}t$:

$$\mathrm{d}\vec{r} = \lim_{\Delta t \to 0} \overrightarrow{OM}(t + \Delta t) - \overrightarrow{OM}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \overrightarrow{M(t)M(t + \Delta t)} = \overrightarrow{M(t)M(t + \mathrm{d}t)} \tag{1.1}$$

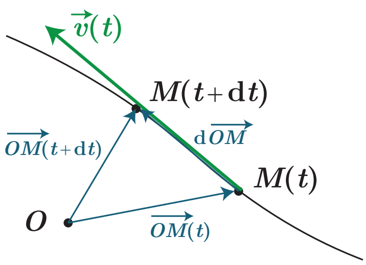
b) Vitesse

On définit le vecteur vitesse moyenne entre l'instant t et $t + \Delta t$ par

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \tag{1.2}$$

* Lorsque Δt devient infinitésimal, on obtient le **vecteur vitesse instantanée** :

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \Rightarrow \boxed{\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}} \tag{1.3}$$



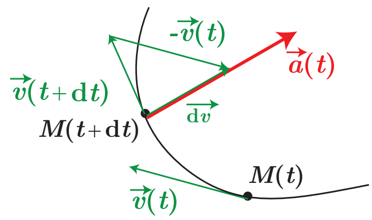
Le vecteur vitesse du point M est **tangent à la trajectoire**.

c) Accélération

De la même manière on peut définir le vecteur **accélération instantanée** :

$$\boxed{\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}} \tag{1.4}$$

* Graphiquement, sur la trajectoire, on peut représenter l'accélération à partir des vecteurs vitesses pour deux instants successifs t et $t + \mathrm{d}t$:



De manière générale, le vecteur accélération instantanée est dirigé vers **l'intérieur de la concavité de la trajectoire** (sauf dans le cas d'une trajectoire rectiligne !).

* Le mouvement est accéléré si $\vec{v} \cdot \vec{a} > 0$, décéléré sinon. En effet, $\vec{v} \cdot \vec{a} = \vec{v} \cdot \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{v}^2\right)$. Donc si cette quantité est positive, cela signifie bien que la vitesse augmente.

II. Systèmes de coordonnées

II.1 Coordonnées cartésiennes

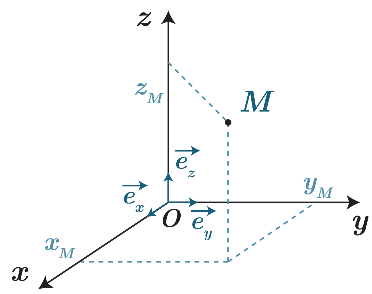
a) Présentation

Le système de coordonnées cartésiennes est le système de coordonnées utilisé par défaut, quand aucune géométrie particulière n'est observée.

En coordonnées cartésiennes, un point M est repéré par ses trois coordonnées $M(x, y, z)$ telles que :

$$\boxed{\vec{r} = x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}} \tag{1.5}$$

où le repère $(O, \vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$, représenté ci-dessous, est orthonormé direct .



b) Déplacement élémentaire

* Déterminons le déplacement élémentaire du point M lorsque ses coordonnées sont augmentées de $\mathrm{d}x$ selon $\vec{e_x}$, $\mathrm{d}y$ selon $\vec{e_y}$ et $\mathrm{d}z$ selon $\vec{e_z}$. Étant donné que les vecteurs unités de la base $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$ sont fixes (indépendants du temps), il vient :

$$\overrightarrow{\mathrm{d}r} = \begin{pmatrix} x + \mathrm{d}x - x \\ y + \mathrm{d}y - y \\ z + \mathrm{d}z - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}z \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{\mathrm{d}r} = \mathrm{d}x\vec{e_x} + \mathrm{d}y\vec{e_y} + \mathrm{d}z\vec{e_z}} \tag{1.6}$$

c) Vitesse et accélération

La vitesse s'obtient de deux façons :

- en dérivant directement le vecteur position par rapport au temps :

$$\boxed{\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{x}\vec{e_x} + \dot{y}\vec{e_y} + \dot{z}\vec{e_z}} \tag{1.7}$$

  car les vecteurs unitaires sont indépendants du temps ;

- en utilisant le déplacement élémentaire, car $\vec{v} = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}r}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}x\vec{e_x} + \mathrm{d}y\vec{e_y} + \mathrm{d}z\vec{e_z}}{\mathrm{d}t} = \dot{x}\vec{e_x} + \dot{y}\vec{e_y} + \dot{z}\vec{e_z}$.

Lorsqu'on dérive **exclusivement** par rapport au temps en mécanique, on utilise la notation $\dot{x}$ pour une dérivée première, et $\ddot{x}$ pour une dérivée seconde.

Enfin, l'accélération s'exprime également simplement à partir de la vitesse :

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \ddot{x}\vec{e_x} + \ddot{y}\vec{e_y} + \ddot{z}\vec{e_z} \tag{1.8}$$

Exercice

Déterminer le vecteur vitesse et le vecteur accélération pour $t = 1$ si $\vec{r} = \begin{pmatrix} 2t^2 - 2t \\ 5t - 1 \\ t^2/2 - 9t \end{pmatrix}$. Que dire de ces deux vecteurs à cet instant ?

$\vec{v} = (2, 5, -8)$ et $\vec{a} = (4, 0, 1)$ donc $\vec{v} \perp \vec{a}$.

Comme dit auparavant, la trajectoire d'un point matériel, tout comme sa vitesse et son accélération, dépend du référentiel choisi. Quand c'est nécessaire, on note alors pour un référentiel $\mathcal{R}$ $\vec{v}_{M/\mathcal{R}}$ ou $\vec{a}_{M/\mathcal{R}}$.

II.2 Coordonnées polaires/cylindriques

a) Présentation

Dans le cas de mouvements de rotation dans un plan autour d'un point fixe ou dans l'espace autour d'un axe fixe, les coordonnées polaires ou cylindriques peuvent être plus adaptées.

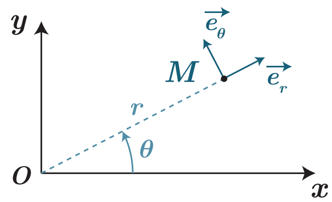
* Les **coordonnées polaires** sont utilisées dans le cas d'un mouvement à deux dimensions :

- on repère la distance à l'axe par

$$r = \|\vec{r}\| \quad \text{avec} \quad r \in \mathbb{R} \tag{1.9}$$

- on repère l'angle θ que fait le vecteur position avec un axe fixé comme origine des angles (Ox) :

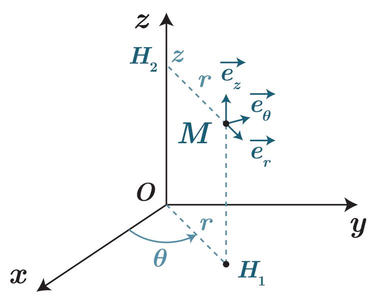
$$\theta = (\vec{e_x}, \vec{r}) \in [0; 2\pi] \tag{1.10}$$



Exercice

Déterminer les coordonnées cartésiennes d'un point défini en coordonnées polaires par $r = 5$ et $\theta = \pi/4$ puis $\theta = 2\pi/3$.

On peut également généraliser à trois dimensions à l'aide des **coordonnées cylindriques**, où vient s'ajouter l'information sur l'altitude z par rapport à un plan de référence :



Dans ce cas, $r = OH_1$ où H_1 est le projeté orthogonal de M sur le plan (xOy), mais également $r = H_2M$ avec H_2 le projeté orthogonal de M sur l'axe (Oz).

b) Base locale

Sur les deux illustrations précédentes ont été dessinées des bases dites **locales**, soit $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$, soit $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$. En effet, ces bases dépendent de la position du point, ces vecteurs ne sont donc pas fixes dans le temps. Définissons-les rigoureusement :

- en coordonnées polaires :
  - $\overrightarrow{e_r} = \dfrac{\overrightarrow{r}}{r}$;
  - $\overrightarrow{e_\theta}$ est le vecteur unitaire perpendiculaire à $\overrightarrow{e_r}$ et orienté dans le sens trigonométrique et permet d'avoir une base orthonormée directe.

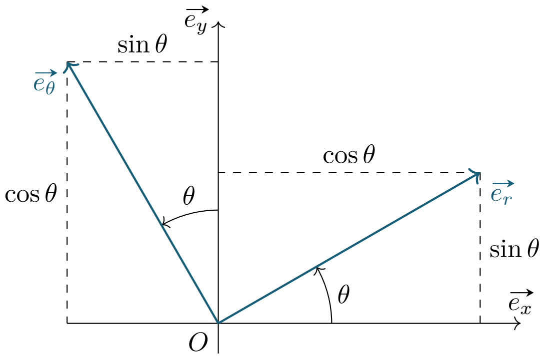
*

- en coordonnées cylindriques :
  - $\overrightarrow{e_r} = \dfrac{\overrightarrow{H_2M}}{r} = \dfrac{\overrightarrow{OH_1}}{r}$;
  - $\overrightarrow{e_\theta}$ est alors le vecteur orthogonal à $\overrightarrow{e_r}$ de sorte à ce que $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$ définisse un plan parallèle à (xOy) ;
  - $\overrightarrow{e_z}$ de la base cartésienne tel que $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$ soit une base orthonormée directe.

Le vecteur position s'écrit alors en coordonnées cylindriques :

$$\boxed{\overrightarrow{r} = r\overrightarrow{e_r} + z\overrightarrow{e_z}} \tag{1.11}$$

Il est dangereux d'écrire le vecteur position sous la forme d'un vecteur colonne dans la base locale, au risque de confondre avec les coordonnées du point : $\overrightarrow{r} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$ MAIS PAS $\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ z \end{pmatrix}$. Préférez une écriture avec les vecteurs de la base locale.



Dans le cas où nous devons dériver ces vecteurs par rapport au temps, il peut être adapté de les exprimer en fonction des coordonnées cartésiennes :

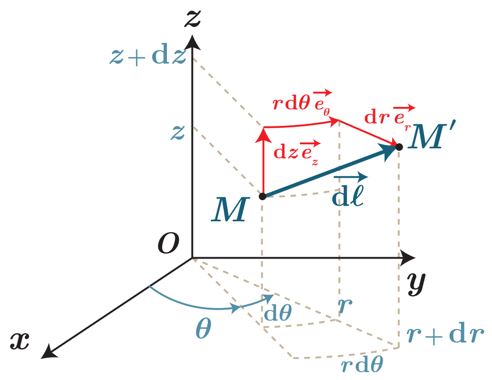
$$\overrightarrow{e_r} = \cos\theta\overrightarrow{e_x} + \sin\theta\overrightarrow{e_y} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{e_\theta} = -\sin\theta\overrightarrow{e_x} + \cos\theta\overrightarrow{e_y} \tag{1.12}$$

* Leur dérivée temporelle s'écrit donc :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_r}}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}\sin\theta\overrightarrow{e_x} + \dot{\theta}\cos\theta\overrightarrow{e_y} = \dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} & (1.13) \\ \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{e_\theta}}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}\cos\theta\overrightarrow{e_x} - \dot{\theta}\sin\theta\overrightarrow{e_y} = -\dot{\theta}\overrightarrow{e_r} & (1.14) \end{cases}$$

c) Déplacement élémentaire

Cherchons le vecteur déplacement élémentaire $\overrightarrow{\mathrm{d}r}$ lorsqu'on effectue une petite variation $\mathrm{d}r$ selon $\overrightarrow{e_r}$, une variation d'angle $\mathrm{d}\theta$, et une variation d'altitude $\mathrm{d}z$ selon $\overrightarrow{e_z}$, comme illustré sur le schéma ci-dessous.



Le déplacement élémentaire se décompose en trois déplacements indépendants :

- un déplacement selon $\overrightarrow{e_\theta}$ de $r\mathrm{d}\theta$ correspondant à une portion infinitésimale de périmètre du cercle de rayon r ;
- un déplacement selon $\overrightarrow{e_r}$ de $\mathrm{d}r$;
- un déplacement selon $\overrightarrow{e_z}$ de $\mathrm{d}z$.

Ainsi

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{d}r} = \mathrm{d}r\overrightarrow{e_r} + r\mathrm{d}\theta\overrightarrow{e_\theta} + \mathrm{d}z\overrightarrow{e_z}} \tag{1.15}$$

Si on effectue d'abord le déplacement élémentaire selon $\overrightarrow{e_r}$, le déplacement élémentaire selon $\overrightarrow{e_\theta}$ s'écrit rigoureusement $(r + \mathrm{d}r)\mathrm{d}\theta\overrightarrow{e_\theta}$, mais on néglige le terme $\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$ devant $r\mathrm{d}\theta$.

d) Vitesse

À partir du vecteur déplacement élémentaire, c'est immédiat :

$$\vec{v} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r\overrightarrow{e_r} + r\mathrm{d}\theta\overrightarrow{e_\theta} + \mathrm{d}z\overrightarrow{e_z}}{\mathrm{d}t} = \boxed{\dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + \dot{z}\overrightarrow{e_z}} \tag{1.16}$$

.

Exercice

Déterminer le vecteur vitesse en dérivant par rapport au temps le vecteur position $\vec{r} = r\overrightarrow{e_r} + z\overrightarrow{e_z}$:

$$\vec{r} = r\overrightarrow{e_r} + z\overrightarrow{e_z} \Rightarrow \vec{v} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\overrightarrow{e_r}} + \dot{z}\overrightarrow{e_z} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + \dot{z}\overrightarrow{e_z} \tag{1.17}$$

e) Accélération

Il n'y a pas d'autre choix que de dériver chaque terme du vecteur vitesse instantanée $\vec{v}$:

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \left(\ddot{r}\overrightarrow{e_r} + \dot{r}\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}\right) + \left(\dot{r}\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} + r\ddot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} - r\dot{\theta}^2\overrightarrow{e_r}\right) + \ddot{z}\overrightarrow{e_z} \tag{1.18}$$

$$= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\overrightarrow{e_r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\overrightarrow{e_\theta} + \ddot{z}\overrightarrow{e_z} \tag{1.19}$$

Il va sans dire que cette expression ne doit PAS être apprise par cœur, il faut savoir la retrouver !

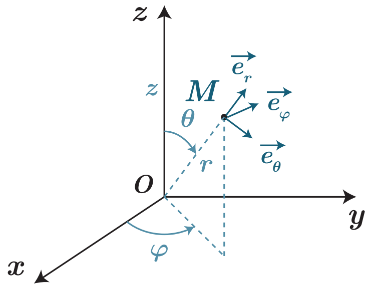
II.3 Coordonnées sphériques

a) Présentation

Lorsqu'on veut repérer le mouvement d'un satellite au-dessous de la Terre, par exemple, on cherche à se repérer autour d'une sphère. On peut alors utiliser les coordonnées… sphériques ! On a besoin de trois coordonnées :

- $r = \|\vec{r}\|$ est la distance du point M au centre du repère ;
- θ est la **colatitude**, angle mesuré depuis l'axe (Oz) ; une variation de cet angle provoque le déplacement le long d'une méridienne ;
- φ est la **longitude**, angle mesuré depuis l'axe (Ox) ; une variation de cet angle provoque le déplacement le long d'un parallèle.

Pour le positionnement terrestre, on utilise plutôt la **latitude** λ à la colatitude. Elle est mesurée depuis l'équateur.



On introduit une base locale, positionnée au niveau du point M :

- le vecteur $\overrightarrow{e_r}$ est dirigé selon $\overrightarrow{r}$, $\overrightarrow{e_r} = \dfrac{\overrightarrow{r}}{r}$;
- le vecteur $\overrightarrow{e_\theta}$ est orthogonal à $\overrightarrow{e_r}$, orienté selon θ ;
- le vecteur $\overrightarrow{e_\varphi}$ est orthogonal au deux vecteurs précédents, de sorte à former une base orthonormée directe, il est donc orienté selon φ.

Exercice

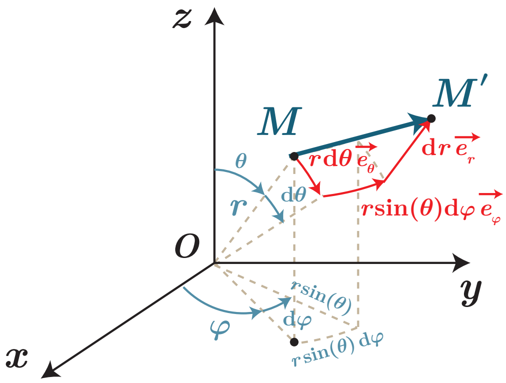
Exprimer les coordonnées cartésiennes à partir des coordonnées sphériques.
$x = r\cos\theta\cos\varphi$, $y = r\cos\theta\sin\varphi$ et $z = r\sin\theta$

b) Déplacement élémentaire

Si on effectue un petit déplacement du point M, de $\mathrm{d}r$, $\mathrm{d}\theta$ et $\mathrm{d}\varphi$, le vecteur déplacement élémentaire se décompose en trois éléments :

*

- un déplacement de $\mathrm{d}r$ selon $\overrightarrow{e_r}$;
- un déplacement de $r\mathrm{d}\theta$ selon $\overrightarrow{e_\theta}$ (on se déplace sur un cercle de rayon r) ;
- un déplacement de $r\sin\theta\mathrm{d}\varphi$ selon $\overrightarrow{e_\varphi}$



Pour résumer le déplacement élémentaire s'exprime ainsi :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{d}r} = \mathrm{d}r\overrightarrow{e_r} + r\mathrm{d}\theta\overrightarrow{e_\theta} + r\sin\theta\mathrm{d}\varphi\overrightarrow{e_\varphi}} \quad (1.20)$$

II.4 Choix d'un système de coordonnées

Parmi les systèmes de coordonnées rencontrés, il faudra toujours se poser la question de celui qui est le plus pertinent à l'étude : le mouvement est-il plan ? dans l'espace ? avec un mouvement circulaire ? autour d'une sphère ?

Un point associé à ce choix est la notion de **degré de liberté** : il s'agit du nombre de paramètres qu'il faut se donner pour fixer la position d'un point matériel par rapport à un référentiel déterminé. Par exemple :

- pour un mouvement quelconque, il y a 3 degrés de liberté (x, y, z par exemple) ;
- pour un mouvement plan, il y a 2 degrés de liberté ;
- pour un mouvement pendulaire dans un plan, ou une chute libre, il n'y a qu'un degré de liberté (respectivement l'angle par rapport à la verticale, ou la coordonnée verticale z).

III. Quelques exemples de mouvements

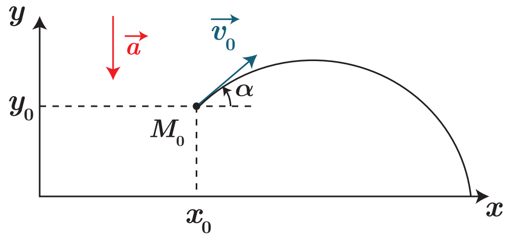
Voyons sur quelques exemples l'emploi des coordonnées cartésiennes et cylindriques. Ce sera l'occasion d'évoquer la notion de trajectoire.

III.1 Mouvement à vecteur accélération constant

On va étudier le mouvement d'un point matériel M subissant une accélération constante. On choisit donc le repère d'espace de sorte que l'accélération soit colinéaire à l'axe (Oy), par exemple $\vec{a} = -a\vec{e_y}$. Le mouvement est **nécessairement plan** : en effet, à $t = 0$, si $\vec{v} = \vec{v}_0$ et $M = M_0$, l'ensemble du mouvement est contenu dans le plan $(M_0, \vec{v}_0, \vec{a})$.

Afin de ne pas restreindre la généralité de l'étude, on suppose que l'objet est lancé depuis une position initiale (x_0, y_0) avec une vitesse initiale $\vec{v_0}$ telle que :

$$\vec{v_0} = v_{0x}\vec{e_x} + v_{0y}\vec{e_y} \tag{1.21}$$
$$= v_0 \cos\alpha\,\vec{e_x} + v_0 \sin\alpha\,\vec{e_y} \tag{1.22}$$



a) Équations horaires

Les équations horaires s'obtiennent par intégration successive de l'accélération :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -a \end{pmatrix} \tag{1.23}$$

La vitesse est ainsi donnée par :

*

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_0 \cos\alpha \\ -at + v_0 \sin\alpha \end{pmatrix} \tag{1.24}$$

Cela permet d'exprimer les **équations horaires** du mouvement par intégration du vecteur vitesse :

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos\alpha t + x_0 & (1.25) \\ y(t) = -at^2/2 + v_0 \sin\alpha t + y_0 & (1.26) \end{cases}$$

b) Trajectoire

Afin d'obtenir l'équation de la **trajectoire** $y(x)$ on exprime t en fonction de x puis on injecte cette expression dans l'expression de y :

$$\begin{cases} t = \dfrac{x - x_0}{v_0 \cos\alpha} & (1.27) \\ y = -\dfrac{1}{2}\dfrac{a}{v_0^2 \cos^2\alpha}(x - x_0)^2 + \tan\alpha(x - x_0) + y_0 & (1.28) \end{cases}$$

On reconnait alors l'équation d'une parabole. On peut ensuite déterminer la portée du mouvement en cherchant la valeur de $x > x_0$ telle que $y = 0$, par exemple.

Si $\alpha = \pi/2$ alors on a une chute libre verticale (en repartant de l'équation horaire) :

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \quad \forall t & (1.29) \\ y(t) = y_0 + v_0 t - \dfrac{1}{2} a t^2 & (1.30) \end{cases}$$

III.2 Mouvement circulaire

L'étude des mouvements circulaires est effectuée en coordonnées polaires car elle y est grandement simplifiée. Le point matériel M est alors repéré par ses coordonnées polaires (r, θ) mais ici $r = R = \mathrm{cste}$.

Exercice

Exprimer le vecteur vitesse et accélération dans le cas où le rayon $r = R$ est fixé.

En reprenant les formules vues pour les coordonnées polaires (cylindriques) mais avec $R = \mathrm{cste}$, on obtient immédiatement :

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e_\theta} \tag{1.31}$$

L'accélération peut être obtenue en dérivant cette expression où en partant de la formule du cours pour l'accélération en cylindrique :

$$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{e_r} + R\ddot{\theta}\vec{e_\theta} \tag{1.32}$$

On appelle **vitesse angulaire** la quantité $\omega = \dot{\theta}$. C'est le nombre de radian dont a tourné le point matériel autour du point O par unité de temps.
On appelle **accélération angulaire** la quantité $\dot{\omega} = \ddot{\theta}$. On distingue alors trois cas :

- $\dot{\omega} < 0$ le mouvement est circulaire **décéléré** ;
- $\dot{\omega} > 0$ le mouvement est circulaire **accéléré** ;
- $\dot{\omega} = 0$ le mouvement est circulaire **uniforme**.

* Dans ce dernier cas les expressions de la vitesse et de l'accélération deviennent :

$$\vec{v} = R\omega\vec{e_\theta} \tag{1.33}$$

$$\vec{a} = -\omega^2 R\vec{e_r} \tag{1.34}$$

et la période de rotation vaut, en notant $v = R\omega$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi R}{v} \tag{1.35}$$

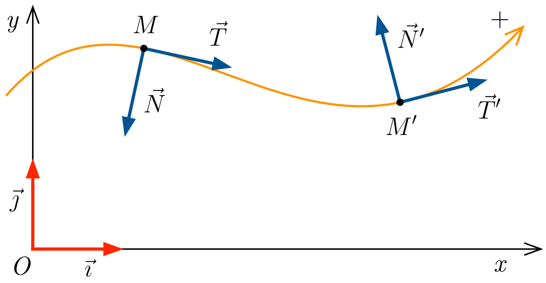
On remarque alors que l'accélération est **orthogonale** à la vitesse et **dirigée vers le centre** de la trajectoire. On parle d'accélération **centripète**.
* De plus, on a :

$$\boxed{\|\vec{a}\| = a = \frac{v^2}{R}} \tag{1.36}$$

III.3 Trajectoire plane quelconque

a) Repérage d'un point

Dans la suite nous allons nous limiter à une trajectoire plane. À une telle trajectoire nous pouvons attacher le repère $(M, \vec{T}, \vec{N})$ appelé repère de Frenet :



Il s'agit d'un repère qui se déplace avec le mobile M ; les vecteurs de base varient par rapport au référentiel galiléen lors du déplacement du point mobile. Les caractéristiques du repère de Frenet sont :

*
- son origine est le point mobile M ;
- le vecteur unitaire $\vec{T}$ est tangent à la trajectoire en M et orienté dans le sens positif ;
- le vecteur unitaire $\vec{N}$ est normal à la trajectoire en M (et donc aussi à $\vec{T}$) et orienté **vers l'intérieur de la courbure** de celle-ci.

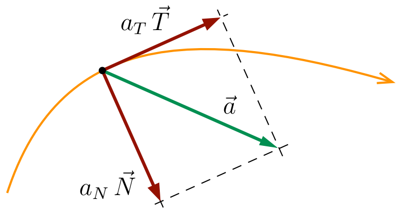
On peut introduire la notion d'abscisse curviligne, notée s, caractérisant la position du point M sur la courbe. On peut alors montrer que : $v_T = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$.

b) Vitesse et accélération dans le repère de Frenet

Comme le vecteur vitesse $\vec{v}$ est tangent à la trajectoire, son expression dans la base de Frenet est $\vec{v} = v_T\vec{T}$ où v_T est la valeur algébrique de la vitesse en M. Ainsi :

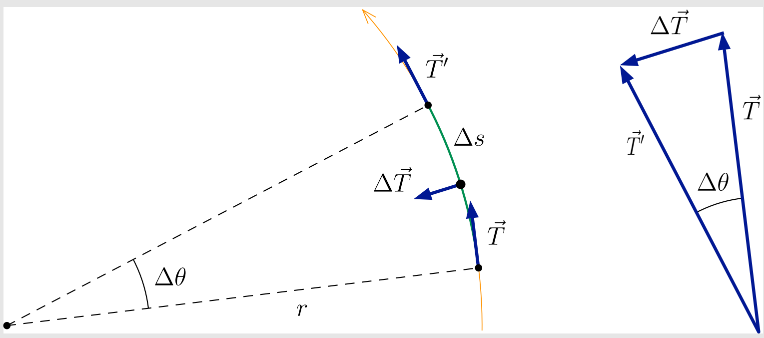
- $v_T > 0$ si le mobile se déplace dans le sens positif ;
- $v_T < 0$ si le mobile se déplace dans le sens contraire.

Concernant l'accélération, on peut la décomposer dans la base de Frenet de la manière suivante :



*
En dérivant l'expression précédente, il vient : $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}v_T}{\mathrm{d}t}\vec{T} + v_T\dfrac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}t}$.
Le premier terme correspond à la composante tangentielle de l'accélération qui est due à la variation de la valeur de la vitesse. Le deuxième terme est une conséquence du changement de la direction du vecteur vitesse.

Considérons un déplacement élémentaire assez petit pour qu'il puisse être approximé par un arc de cercle de rayon r. Ce rayon est appelé **rayon de courbure** de cette partie de la trajectoire. On introduit aussi la courbure $\gamma = \dfrac{1}{r}$.



Le triangle formé par $\Delta\vec{T}$, $\vec{T}'$ et $\vec{T}$ est isocèle, car $\vec{T}$ et $\vec{T}'$ sont de norme égale à l'unité.

Ainsi la longueur de la base du triangle vaut $\left\|\Delta\vec{T}\right\| = 2\left\|\vec{T}\right\|\sin(\Delta\theta/2) \simeq \Delta\theta$ en utilisant l'approximation $\sin(x) \simeq x$ pour $x \ll 1$.
La portion de cercle de rayon r Δs vérifie $\Delta s = r\Delta\theta$, d'où $\left\|\Delta\vec{T}\right\| = \frac{1}{r}\Delta s$. Du fait de la direction et du sens de $\Delta\vec{T}$, il vient $\Delta\vec{T} = \frac{1}{r}\Delta s\vec{N}$ soit en divisant par l'intervalle de temps Δt et en prenant la limite $\Delta t \to 0$:

$$\frac{\Delta\vec{T}}{\Delta t} = \frac{1}{r}\frac{\Delta s}{\Delta t}\vec{N} \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} \frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\vec{N} = \frac{v_T}{r}\vec{N} \tag{1.37}$$

Ainsi l'accélération s'écrit :

$$\boxed{\vec{a} = \frac{\mathrm{d}v_T}{\mathrm{d}t}\vec{T} + \frac{v_T^2}{r}\vec{N}} \tag{1.38}$$

Quelques remarques :

- la coordonnée tangentielle a_T est positive si v_T augmente et négative dans le cas contraire ;
- l'accélération est normale à la trajectoire si et seulement si le mouvement est uniforme ;
- * la coordonnée normale a_N étant positive, le **vecteur accélération est toujours orienté vers l'intérieur de la courbure**. Elle s'annule lorsque la courbure $\gamma = \frac{1}{r}$ s'annule, c'est-à-dire sur les portions rectilignes de la trajectoire et aux points d'inflexion. Son expression montre qu'elle est d'autant plus grande que le mobile étudié effectué un virage serré (r petit) et rapide (v_T grande).
- on retrouve la même forme d'accélération que dans le cas d'un mouvement circulaire, à ceci près qu'on l'extrapole à des mouvements plans quelconques, en définissant localement le rayon de courbure.

Exercices

1.1 Avion de chasse

1. Un avion de chasse veut décoller d'un porte-avion. Sachant qu'il peut décoller lorsque sa vitesse au sol atteint $v_\ell = 150\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et que le pilote ne peut supporter un accélération supérieure à $a = 10g$, déterminer la longueur minimale ℓ de la piste en supposant que sur la piste l'avion possède un mouvement uniformément accéléré. On l'exprimera littéralement en fonction de v_ℓ et g puis on effectuera l'application numérique.
2. Un avion de chasse volant à vitesse constante $v = 250\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ entame un virage circulaire. Quel est le rayon minimal R du virage pour qu'il n'y ait pas de danger pour le pilote ? On l'exprimera en fonction de v et g et on effectuera l'application numérique.

On prendra soin d'introduire le système de coordonnées et de démontrer les résultats nécessaires pour chaque question.

1.2 Mouvement circulaire

On considère une bille attachée à une ficelle lui permettant de se déplacer en rotation uniforme autour d'un axe fixe à une distance R. On note ω sa pulsation. L'extrémité de la ficelle attachée sur l'axe est immobile.

1. Donner l'expression de la vitesse de cette bille en coordonnées cylindriques.
2. En déduire les coordonnées cartésiennes associées.
3. Montrer à l'aide des coordonnées cartésiennes que la trajectoire est un cercle.
4. Calculer l'accélération en coordonnées cylindriques et montrer qu'elle est proportionnelle au vecteur position $\overrightarrow{R}$.

---

1. $\overrightarrow{r} = R\overrightarrow{e_r}$ donc $\overrightarrow{v} = R\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} = R\omega\overrightarrow{e_\theta}$.
2. En coordonnées cartésiennes, $\overrightarrow{e_\theta} = -\sin\theta\overrightarrow{e_x} + \cos\theta\overrightarrow{e_y}$ donc :
$$v_x = -R\omega\sin\theta \quad \text{et} \quad v_y = +R\omega\cos\theta \tag{1.39}$$
avec $\theta = \omega t$.
3. Pour le vecteur position, on a $\overrightarrow{e_r} = \cos\theta\overrightarrow{e_x} + \sin\theta\overrightarrow{e_y}$ donc $x = R\cos\theta$ et $y = R\sin\theta$. Ainsi $x^2 + y^2 = R^2$ correspondant bien à l'équation d'un cercle.
4. $\overrightarrow{a} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = -R\omega^2\overrightarrow{e_r} = -\omega^2\overrightarrow{R}$.

1.3 Analyse d'équations horaires

Pour chacune des équations horaires ci-dessous, préciser les caractéristiques du mouvement, le vecteur vitesse et accélération et si possible l'équation de la trajectoire :

1. $x(t) = 2t^2 - 6t + 3$ et $y(t) = 2t - 5$ (tel que x, y soit en mètres si t est exprimé en secondes)
2. $r(t) = 10\,\mathrm{m}$ et $\theta(t) = 5t$
3. $r(t) = 3t - 2$, $\theta = 2\,\mathrm{rad}$
4. $r(t) = R$, $\theta = \omega t$ et $z = ht$

1.4 Vitesse d'une voiture

1. Calculer l'accélération nécessaire, supposée constante, pour qu'une voiture initialement à une vitesse $v = 50\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ puisse s'arrêter en une distance inférieure à 15 m. Comparer à l'accélération de la pesanteur.
2. Deux voitures se suivent, roulant à $v = 90\,\mathrm{km\,h^{-1}}$, à une distance d'environ 180 m : l'une d'elle ralentit alors brusquement avec une décélération constante $a_1 = -2{,}0\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. Celle la suivant commence à freiner deux secondes plus tard, avec une décélération constante plus faible $a_2 = -1{,}0\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.
   (a) En prenant pour origine du repère spatial la position de la seconde voiture à l'instant où la première commence à freiner, établir les équations horaires du mouvement des deux véhicules (on pourra travailler directement de manière numérique).

(b) Y aura-t-il un choc ? Justifier rigoureusement.

---

1. Considérons une décélération uniforme de valeur $-a$. Alors $v(t) = v - at$ et donc $x(t) = vt - \frac{1}{2}at^2$ en prenant $x(t=0) = 0$. Le véhicule s'arrête au bout d'un temps tel que $v(t_a) = 0$ donc $t_a = \frac{v}{a}$. La distance parcourue est donc $\ell = x(t_a) = \frac{v^2}{a} - \frac{1}{2}a\frac{v^2}{a^2} = \frac{v^2}{2a}$. Il faut donc une accélération de :

$$-a = -\frac{v^2}{2\ell} = -12{,}9\,\mathrm{m\,s^{-2}} \tag{1.40}$$

avec $v = \frac{50}{3{,}6} = 13{,}9\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. C'est une décélération dont la norme est comparable à g.

2. (a) Précisons les conditions initiales à $t = 0$ $v_1(t=0) = v = v_2(t=0) = 25\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $x_1(t=0) = 180\,\mathrm{m}$, $x_2(t=0) = 0$. Intégrons les équations entre $t = 0$ et $t = 2\,\mathrm{s}$:

$$\begin{cases} a_1 = -2 \Longrightarrow v_1 = a_1 t + v_1(t=0) = -2t + 25 \Longrightarrow x_1(t) = -t^2 + 25t + 180 & (1.41) \\ a_2 = 0 \Longrightarrow v_2(t) = v_2(t=0) = 25 \Longrightarrow x_2(t) = 25t & (1.42) \end{cases}$$

On poursuit pour $t > 2$, juste pour la voiture 2, en calculant la constante d'intégration pour $t = 2$:

$$a_2(t>2) = -1 \Longrightarrow v_2(t>2) = -t + B = -(t-2) + 25 = -t + 27 \Longrightarrow x_2(t>2) = -\frac{1}{2}t^2 + 27t + B \tag{1.43}$$

Pour la dernière équation, on trouve B en écrivant la condition pour $t = 2$:

$$-\frac{1}{2}2^2 + 54 + B = 50 \Longrightarrow B = -2 \Longrightarrow x_2(t>2) = -\frac{1}{2}t^2 + 27t - 2 \tag{1.44}$$

L'ensemble de ces équations ne sont valables tant que $v_1 \geq 0$ et $v_2 \geq 0$! ! (les voitures ne vont pas ensuite reculer), c'est-à-dire pour la voiture 1 tant que $t < 12{,}5\,\mathrm{s}$ et pour la voiture 2 tant que $t < 27\,\mathrm{s}$.

(b) Distinguons les cas :

- si $t < 2$, $x_1 = x_2$ conduit à $-t^2 + 180 = 0$ donc $t = 13{,}4\,\mathrm{s}$, ce qui est impossible ;
- si $2 < t < 12{,}5$, $x_2 = x_2$ conduit à $-t^2 + 25t + 180 = -\frac{1}{2}t^2 + 27t - 2$ soit $\frac{1}{2}t^2 + 2t - 182 = 0$. Une résolution numérique donne $t = -21{,}2\,\mathrm{s}$ ou $t = 17{,}2\,\mathrm{s}$ ce qui n'est pas possible ;
- si $12{,}5 < t < 27$: $x_1 = 336{,}3\,\mathrm{m}$, donc $x_1 = x_2$ conduit à $\frac{1}{2}t^2 - 27t + 338{,}3 = 0$ dont les solutions sont $t = 19{,}8\,\mathrm{s}$ et $t = 34{,}2\,\mathrm{s}$.

Le choc se produit donc au bout de $19{,}8\,\mathrm{s}$!

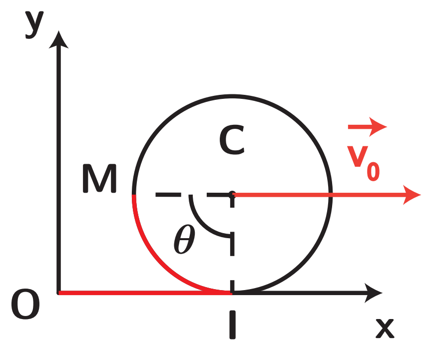
1.5 Grue

Le bras d'une grue tourne dans un plan horizontal (xOy) à la vitesse angulaire constante ω_0. Sur ce bras se translate à vitesse constante v_0 un chariot assimilé à un point matériel M. À l'instant initial il se trouve au centre de rotation O du bras, l'axe Ox est fixe par rapport au sol et confondu avec le bras de la grue à l'instant initial. On observe le mouvement depuis le sol.

1. Donner les équations horaires du chariot en choisissant une base adaptée.
2. Donner l'équation de la trajectoire et représenter celle-ci. Quelle est sa nature ?
3. Établir les expressions des vecteurs vitesse et accélération dans le système de coordonnées choisi à la question 1).
4. Choisir un autre référentiel permettant de mettre en évidence que le vecteur vitesse et accélération est différent de ceux trouvés à la question précédente.

1.6 Vélo

Cherchons la trajectoire d'un point, noté M par la suite, sur le périmètre d'une roue de vélo de centre C et de rayon r. Initialement M coïncide avec O, l'origine du repère. Ensuite, au cours du mouvement, on appelle $\theta(t)$ l'angle entre $\overrightarrow{CM}$ et la verticale descendante. La roue roule sans glisser sur le sol de manière à ce que l'abscisse x_I du point de contact I de la roue avec le sol soit égale à l'arc de cercle IM. Enfin, la vitesse du centre de la roue vaut $\vec{v}_C = v_0\vec{e_x}$ où $v_0 > 0$.

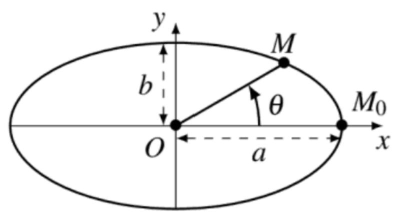


1. Donner l'évolution de l'angle $\theta(t)$ en fonction du temps.
2. Donner la position cartésienne du point M. On s'aidera éventuellement dans un premier temps d'une relation vectorielle.
3. A l'aide de Python, tracer l'allure de la trajectoire. Cela s'appelle une cycloïde.

1.7 Déplacement sur une ellipse

Un point M se déplace sur une ellipse d'équation cartésienne $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ dans le sens trigonométrique. On note θ l'angle que fait $\overrightarrow{OM}$ avec l'axe (Ox). Les coordonnées de M peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} x(t) = \alpha\cos(\omega t + \varphi) & (1.45) \\ y(t) = \beta\sin(\omega t + \psi) & (1.46) \end{cases}$$



avec $\omega = \text{cste}$.

1. Justifier que $\alpha = a$ et déterminer les trois autres constantes.
3. Déterminer les composantes de la vitesse $(\dot{x}, \dot{y})$ et de l'accélération $(\ddot{x}, \ddot{y})$.
4. Montrer que l'accélération est de la forme $\vec{a} = -\omega^2\overrightarrow{OM}$. Commenter.